数理解析研究所講究録
第 1652 巻 2009 年 85-92

多変数代数関数の Taylor & Hensel 級数の収束領域

佐々木 建昭 (Tateaki Sasaki) *
筑波大学 数学系
INSTITUTE OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF TSUKUBA

稲葉 大樹 (Daiju Inaba) †
日本数学検定協会
MATHEMATICS CERTIFICATION INSTITUTE

Abstract

多変数の Hensel 因子を初期因子の根で表す新しい定式化により、与式がモニックで初期因子が無平方との仮定の下で、多変数代数関数の収束領域を表す公式の導出に挑戦する（現時点では証明の細部が未完成である）。展開点が非特異の場合には代数関数は Taylor 級数に展開され、特異な場合には Hensel 級数と命名された級数に展開されるが、導出された公式はどちらの場合にも適用可能なものである。

1 はじめに

1 変数解析関数の級数展開の収束領域は大学生用のどの教科書にも載っているほど有名である。しかしながら、多変数級数の場合には、収束性に関する高尚な理論は多々あるが、収束領域を記載している教科書を見たことがない。本稿は対象を多変数代数関数に限定し、収束領域を明示的に定める公式を導くことを試みる。求め方は、従来の解析的方法とは全く異り、Hensel 構成に基づく代数的方法である。

本稿では、多変数代数関数 $\phi(\boldsymbol{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \phi(u_1,\ldots,u_\ell)$ $(\ell \geq 2)$ は定義多項式 $F(x,\boldsymbol{u}) \stackrel{\text{def}}{=} F(x,u_1,\ldots,u_\ell)$ の x に関する根として定まると仮定する。

$$F(\varphi(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{u}) = 0, \quad \deg_x(F) = n. \tag{1.1}$$

ただし、F は x に関してモニックと仮定する。多変数級数の収束領域は知られていないと述べたが、例外は 2 次の代数関数である。定義多項式が $x^2 - 2f_1(\boldsymbol{u})x + f_0(\boldsymbol{u})$ であるとき、根は

$$\phi(\boldsymbol{u}) = f_1(\boldsymbol{u}) \pm \sqrt{f_1(\boldsymbol{u})^2 - f_0(\boldsymbol{u})} = f_1(\boldsymbol{u}) \pm f_1(\boldsymbol{u})\Big(1 - \frac{f_0(\boldsymbol{u})}{2f_1(\boldsymbol{u})^2} + \frac{f_0(\boldsymbol{u})^2}{8f_1(\boldsymbol{u})^4} - \cdots\Big)$$

と展開できる。したがって、収束領域は $|f_0(\boldsymbol{u})| < |f_1(\boldsymbol{u})^2|$ である。

本稿のアプローチを簡単に説明する（詳細は 2 章以降で述べる）。級数展開では展開点を指定する必要がある。展開点を $\boldsymbol{s} \in \mathbf{C}^\ell$ とする。$F(x,\boldsymbol{s})$ が重根を持つとき $\boldsymbol{s}$ を **Hensel 構成の特異点**（以下では特異点と略す）という。$\boldsymbol{s}$ が特異点でないとき、$F(x,\boldsymbol{u})$ の x に関する n 個の代数関数は展開点 $\boldsymbol{s}$ で Taylor 級数に展開できる。これらの級数は、記号 Newton 法で 1 個づつ計算してもよいが、$F(x,\boldsymbol{s})$ の n 個の 1 次因子を初期因子とする一般 Hensel 構成で同時に計算するのが便利である [6]：

$$F(x,\boldsymbol{u}) \equiv (x - \phi_1^{(k)}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{s}))\cdots(x - \phi_n^{(k)}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{s})) \pmod{\langle u_1-s_1,\cdots,u_\ell-s_\ell\rangle^{k+1}}. \tag{1.2}$$

*sasaki@math.tsukuba.ac.jp
†inaba@math.tsukuba.ac.jp

この計算方法は実際的であるが、得られる級数には $F(x,\boldsymbol{u})$ の $\boldsymbol{u}$ を含む各項がバラバラに入り込み、収束領域公式を得るのは容易ではない。そこで本稿では、$F_{\mathrm{u}}(x,\boldsymbol{u}) \stackrel{\text{def}}{=} F(x,\boldsymbol{u}) - F(x,\boldsymbol{s})$ とおき、$F_{\mathrm{u}}(x,\boldsymbol{u})$ が常に一塊となって現れる形で Hensel 構成を定式化する。この定式化により、べき級数根 $\phi_i^{(k)}(\boldsymbol{u})$ は非常に簡潔な形で表される。この定式化なくしては、収束領域公式を得るのは至難であろう。

$\ell > 1$ で展開点 $\boldsymbol{s}$ が特異点の場合、$F(x,\boldsymbol{s})$ の重根に対応する根は従来の Hensel 構成では計算できない。($\ell = 1$ の場合は、$u_1 - s_1 = v^m$ (m は当該根の多重度) とおくことで v の Taylor 級数として計算できる。) このような場合に根を強引に "級数" 形で計算するのが拡張 Hensel 構成である。拡張 Hensel 構成で計算した級数根を筆者等は **Hensel 級数**と命名した。一般 Hensel 構成に対する上述の新しい定式化は拡張 Hensel 構成にも適用できて、Hensel 級数に対する収束領域公式が得られる。ただし、現時点では、全ての場合に対応する公式は得られておらず、「与式は展開点で無平方」など、いくつかの制約がある [5]。

2 一般 Hensel 構成の新しい定式化からのアプローチ

与式 $F(x,\boldsymbol{u})$ は x に関してモニックで、$\mathbf{C}$ 上既約であるとする。一般性を失うことなく、展開点は原点であるとし、与式を次のように分解する。

$$F(x,\boldsymbol{u}) = F_0(x) + F_{\mathrm{u}}(x,\boldsymbol{u}), \quad \begin{cases} F_0(x) \stackrel{\text{def}}{=} F(x,\boldsymbol{0}), \\ F_{\mathrm{u}}(x,\boldsymbol{u}) \stackrel{\text{def}}{=} f_{n-1}(\boldsymbol{u})x^{n-1} + \cdots + f_0(\boldsymbol{u})x^0. \end{cases} \tag{2.1}$$

本章では $F_0(x)$ は無平方であると仮定し (本章で最も重要な仮定)、$F_0(x)$ の根を $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ とする：

$$F_0(x) = (x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n), \quad \alpha_i \neq \alpha_j \ (\forall i \neq j). \tag{2.2}$$

通常の Hensel 構成は法としてイデアル $\langle u_1,\ldots,u_\ell\rangle$ を選ぶが、我々は補助変数 t を用いて、

$$\tilde{F}(x,\boldsymbol{u},t) \stackrel{\text{def}}{=} F_0(x) + t\,F_{\mathrm{u}}(x,\boldsymbol{u},t) \equiv (x - \phi^{(k)}(\boldsymbol{u},t)) \cdot G^{(k)}(x,\boldsymbol{u},t) \pmod{t^{k+1}} \tag{2.3}$$

と構成する。以下、$G_1^{(k)} = x - \phi^{(k)}(\boldsymbol{u},t)$ と表す。

上記 Hensel 構成は次のように行う。まず、初期因子は $G_1^{(0)} = x - \alpha_1$, $G^{(0)} = F_0(x)/(x-\alpha_1)$ と定める。次に、$k-1$ 次の Hensel 因子 $G_1^{(k-1)}$ と $G^{(k-1)}$ が得られたとして、k 次の残余 $\delta F^{(k)}$ を次式で計算する：

$$\begin{aligned} t^k\,\delta F^{(k)}(x,\boldsymbol{u}) &\equiv \tilde{F}(x,\boldsymbol{u},t) - G_1^{(k-1)}(x,\boldsymbol{u},t)\cdots G^{(k-1)}(x,\boldsymbol{u},t) \pmod{t^{k+1}}, \\ \delta F^{(k)}(x,\boldsymbol{u}) &\stackrel{\text{def}}{=} \delta f_{n-1}^{(k)}(\boldsymbol{u})\,x^{n-1} + \cdots + \delta f_0^{(k)}(\boldsymbol{u})\,x^0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

k 次の Hensel 因子 $G_1^{(k)}$ と $G^{(k)}$ はよく知られた次の公式で計算する：

$$\begin{cases} G_1^{(k)}(x,\boldsymbol{u},t) = G_1^{(k-1)}(x,\boldsymbol{u},t) + t^k \delta G_1^{(k)}(x,\boldsymbol{u}), & \delta G_1^{(k)}(x,\boldsymbol{u}) = \sum^{n-1} B_l(x)\,\delta f_l^{(k)}(\boldsymbol{u}), \\ G^{(k)}(x,\boldsymbol{u},t) = G^{(k-1)}(x,\boldsymbol{u},t) + t^k \delta G^{(k)}(x,\boldsymbol{u}), & \delta G^{(k)}(x,\boldsymbol{u}) = \sum_{l=0} A_l(x)\,\delta f_l^{(k)}(\boldsymbol{u}), \end{cases} \tag{2.5}$$

ここで、Moses-Yun の補間式 $A_l(x), B_l(x)$ は次式を満たすように決定する。

$$\begin{aligned} (x-\alpha_1)\,A_l(x) + [F_0(x)/(x-\alpha_1)]\,B_l(x) = x^l, &\qquad 0 \le l < n-1, \\ \deg_x(A_l) < n-1, \qquad \deg_x(B_l) < 1. & \end{aligned} \tag{2.6}$$

上式の x に α_1, $\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ を代入すると、$B_l(x) = \alpha_1^l/\prod_{j=2}^n(\alpha_1-\alpha_j)$ および $A_l(\alpha_j) = \alpha_j^l/(\alpha_j-\alpha_1)$ $(j=2,\ldots,n)$ を得る。これらより、Lagrange の補間式を使えば $A_l(x)$ と $B_l(x)$ が次のように定まる。

$$A_l(x) = \sum_{j=2}^n \alpha_j^l \frac{F_0(x)/(x-\alpha_1)(x-\alpha_j)}{F_0'(\alpha_j)}, \qquad B_l(x) = \frac{\alpha_1^l}{F_0'(\alpha_1)}. \tag{2.7}$$

注釈 上記の Hensel 構成は従来の Hensel 構成と異る Hensel 因子を与えそうだが、得られた Hensel 因子で $t=1$ とおけば同じ因子が得られる。異るのは、$F_{\mathrm{u}}(x,\boldsymbol{u})$ の各項を取り込む順序だけである。 ◇

上記の構成法を理解するため、2次まで Hensel 構成してみよう。まず、$\delta F^{(1)}(x,\boldsymbol{u}) = F_{\mathrm{u}}(x,\boldsymbol{u})$ である。次に、$\sum_{l=0}^{n-1}\alpha_i^l f_l = F_{\mathrm{u}}(\alpha_i,\boldsymbol{u})$ $(i=1,\ldots,n)$ であるから、1次の構成は次式となる。

$$F(x,\boldsymbol{u},t) \equiv \left(x-\alpha_1+t\,\frac{F_{\mathrm{u}}(\alpha_1,\boldsymbol{u})}{F_0'(\alpha_1)}\right) \times \left(\frac{F_0(x)}{x-\alpha_1} + t\sum_{j=2}^n \frac{F_0(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_j)}\,\frac{F_{\mathrm{u}}(\alpha_j,\boldsymbol{u})}{F_0'(\alpha_j)}\right) \pmod{t^2}. \tag{2.8}$$

この式から t^2-項を取り出すと、2次の残余として次式を得る。

$$\delta F^{(2)}(x,\boldsymbol{u}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} -\sum_{j=2}^n \frac{F_0(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_j)}\,\frac{F_{\mathrm{u}}(\alpha_1,\boldsymbol{u})}{F_0'(\alpha_1)}\,\frac{F_{\mathrm{u}}(\alpha_j,\boldsymbol{u})}{F_0'(\alpha_j)}. \tag{2.9}$$

したがって、2次の Hensel 構成は次式となる。

$$\begin{aligned} F(x,\boldsymbol{u},t) \;\equiv\; & \left(x-\alpha_1+t\,\frac{F_{\mathrm{u}}(\alpha_1,\boldsymbol{u})}{F_0'(\alpha_1)} + t^2\frac{\delta F^{(2)}(\alpha_1,\boldsymbol{u})}{F_0'(\alpha_1)}\right) \qquad \pmod{t^3} \\ \times\; & \left\{\frac{F_0(x)}{x-\alpha_1} + \sum_{j=2}^n \frac{F_0(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_j)}\left(t\,\frac{F_{\mathrm{u}}(\alpha_j,\boldsymbol{u})}{F_0'(\alpha_j)} + t^2\frac{\delta F^{(2)}(\alpha_j,\boldsymbol{u})}{F_0'(\alpha_j)}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

この計算手順を帰納すれば、容易に次の定理が得られる。

定理 1 $F(x,\boldsymbol{u})$ は x についてモニックで $F_0(x)$ は無平方とするとき、$\tilde{F}(x,\boldsymbol{u},t)$ は t^{k+1} を法として

$$\begin{aligned} \tilde{F}(x,\boldsymbol{u},t) \;\equiv\; & \left\{x-\alpha_1+t\,\frac{\delta F^{(1)}(\alpha_1,\boldsymbol{u})}{F_0'(\alpha_1)} + \cdots + t^k\,\frac{\delta F^{(k)}(\alpha_1,\boldsymbol{u})}{F_0'(\alpha_1)}\right\} \qquad \pmod{t^{k+1}} \\ \times\; & \left\{\frac{F_0(x)}{x-\alpha_1} + \sum_{j=2}^n \frac{F_0(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_j)}\left(t\,\frac{\delta F^{(1)}(\alpha_j,\boldsymbol{u})}{F_0'(\alpha_j)} + \cdots + t^k\,\frac{\delta F^{(k)}(\alpha_j,\boldsymbol{u})}{F_0'(\alpha_j)}\right)\right\} \end{aligned} \tag{2.11}$$

と因数分解できる。ここで、$\delta F^{(1)} = F_{\mathrm{u}}(x,\boldsymbol{u})$ であり、k 次の残余 $\delta F^{(k)}$ $(k\geq 2)$ は

$$\delta F^{(k)}(x,\boldsymbol{u}) = -\sum_{j=2}^n \frac{F_0(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_j)}\left(\sum_{k'=1}^{k-1}\frac{\delta F^{(k')}(\alpha_1,\boldsymbol{u})}{F_0'(\alpha_1)}\,\frac{\delta F^{(k-k')}(\alpha_j,\boldsymbol{u})}{F_0'(\alpha_j)}\right) \tag{2.12}$$

で与えられる。 ◇

上記の定式化だけでも Hensel 因子は簡潔に表されているが、さらなる簡単化を行う。まず、

$$\delta G_i^{(k)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\delta F^{(k)}(\alpha_i,\boldsymbol{u})}{F_0'(\alpha_i)} \quad (i=1,\ldots,n), \qquad S_{1,j}^{(k)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{k'=1}^{k-1}\delta G_1^{(k')}\delta G_j^{(k-k')} \quad (j,k\geq 2). \tag{2.13}$$

とおき、ベクトル $\vec{G}$, $\vec{\rho}$, 等を次式で定義する（以下、添字 j は常に $j\geq 2$ とする）。

$$G_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{F_{\mathrm{u}}(\alpha_i,\boldsymbol{u})}{F_0'(\alpha_i)} \quad (i=1,\ldots,n), \qquad \vec{G} \stackrel{\mathrm{def}}{=} {}^t(G_2,\cdots,G_n), \tag{2.14}$$

$$r_j \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{\alpha_j-\alpha_1} \quad (j=2,\ldots,n), \qquad \vec{\rho}^{\,k} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (r_2^k,\cdots,r_n^k) \quad (k=1,2,\ldots). \tag{2.15}$$

$F_0(x)/(x-\alpha_i)|_{x=\alpha_i} = F_0'(\alpha_i)$ $(i=1,\ldots,n)$ に注意すると、(2.12) より次式を得る。

$$\delta G_1^{(k)} = \sum_{j=2}^{n} r_j S_{1,j}^{(k)}, \quad \delta G_j^{(k)} = -\, r_j S_{1,j}^{(k)} \qquad (k \ge 2). \tag{2.16}$$

補正項 $\delta G_1^{(k')}$, $\delta G_j^{(k')}$ $(k'=1,2,\cdots)$ を用いて (2.11) を表すと、次式のように簡潔な公式となる。

$$\begin{aligned}\tilde{F}(x,u,t) \;\equiv\; & \Big\{x-\alpha_1 + t\,G_1 + \sum_{j=2}^{n}\Big(t^2\delta G_1^{(2)} + \cdots + t^k \delta G_1^{(k)}\Big)\Big\} \qquad (\mathrm{mod}\ t^{k+1}), \\ \times\; & \Big\{\frac{F_0(x)}{x-\alpha_1} + \sum_{j=2}^{n}\frac{F_0(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_j)}\Big(t\,G_j + t^2\delta G_j^{(2)} + \cdots + \cdots + t^k\delta G_j^{(k)}\Big)\Big\}.\end{aligned} \tag{2.17}$$

$\delta G_1^{(1)} = G_1$, $\delta G_j^{(1)} = G_j$ であり、$S_{1,j}^{(2)} = G_1 G_j$, $\delta G_1^{(2)} = G_1(\vec{\rho}\cdot\vec{G})$, $\delta G_j^{(2)} = -G_1(r_j G_j)$ であるから、例えば 3 次の Hensel 構成は次式となる（$\vec{\rho}\cdot\vec{G}, \vec{\rho}^2\cdot\vec{G}, \ldots$ はベクトルの内積を表す)。

$$\begin{aligned}\tilde{F} \;\equiv\; & \Big\{x-\alpha_1 + t\,G_1 + t^2 G_1(\vec{\rho}\cdot\vec{G}) + t^3 G_1(\vec{\rho}\cdot\vec{G})^2 - t^3 G_1^2(\vec{\rho}^2\cdot\vec{G})\Big\} \\ \times\; & \Bigg[\frac{F_0(x)}{x-\alpha_1} + \sum_{j=2}^{n}\frac{F_0(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_j)}\cdot\Big\{t\,G_j - t^2 G_1(r_j G_j) \qquad (\mathrm{mod}\ t^4) \\ & \qquad - t^3 G_1(\vec{\rho}\cdot\vec{G})(r_j G_j) + t^3 G_1^2(r_j^2 G_j)\Big\}\Bigg].\end{aligned} \tag{2.18}$$

Hensel 因子が非常に構造化された形で簡潔に表されることが分るであろう。

3 級数根 $\phi^{(k)}(u,1)$ の解析

$\phi^{(k)}(u,1)$ は $F(\phi(u),u)=0$ で定義される代数関数 $\phi(u)$ の展開点 $(u)=(0,\ldots,0)$ における級数展開であることを指摘しておく。本章では、$\phi^{(k)}(u,1)$ に現れる "項" を調べる。

定義 1（*G* 積） G_1, G_j, $\vec{\rho}^l\cdot\vec{G}$ および $r_j^l G_j$ $(l=1,2,\ldots)$ の積を *G* 積と言う。*G* 積が k 個の G_i 等の積であるとき、その *G* 積は k 次であるという。 ◇

補題 1 $k \ge 2$ に対して次の主張が成立する。
主張 1) $S_{1,j}^{(k)}$ は次の形の k 次の *G* 積である（l_i と k'' は 0 でもよい)。

$$m\,G_1^{k_0}\,(\vec{\rho}\cdot\vec{G})^{l_1}\,(\vec{\rho}^2\cdot\vec{G})^{l_2}\cdots(\vec{\rho}^{k'}\cdot\vec{G})^{l_{k'}}\,r_j^{k''}G_j, \quad m\in\mathbf{Z}, \tag{3.1}$$

$$\text{where}\ \ k_0 + l_1 + l_2 + \cdots + l_{k'} + 1 = k, \quad k_0 \ge 1, \quad k' \le k-2, \tag{3.2}$$

$$\text{and}\ \ l_1 + 2l_2 + \cdots + k' l_{k'} + k'' = k-2. \tag{3.3}$$

主張 2) $\delta G_1^{(k)}$ と $\delta G_j^{(k)}$ に現れる *G* 積は、(3.1) の右端の因子 $r_j^{k''}G_j$ をそれぞれ $\vec{\rho}^{k''+1}\cdot\vec{G}$ と $(-r_j^{k''+1}G_j)$ で置き換えたものである。
主張 3) (3.1) の係数 m の符合は次式で与えられる。

$$\mathrm{sign}(m) = (-1)^{l_2+2l_3+\cdots+(k'-1)l_{k'}+k''} = (-1)^{k_0-1}. \tag{3.4}$$

主張 4) 和 $\sum_{k'=1}^{k-1}\delta G_1^{(k')}\delta G_j^{(k-k')}$ に現れる同じ *G* 積は同じ符合を持ち、キャンセルしない。

証明 (3.1) の *G* 積を $G\mathrm{pr}_{1,j}^{(k)}$ と表す。(3.2) と (3.3) は、$G\mathrm{pr}_{1,j}^{(k)}$ において G_i と r_j がそれぞれ何個づつ掛けられているかを表すことに注意。

主張１）は $k=2,3$ に対して正しい。主張１）が次数 k まで正しいと仮定する。$S_{1,j}^{(k+1)}$ に現れる G 積は、$G_1 \times r_j G\mathrm{pr}_{1,j}^{(k)}$ であるか、$G_j \times (\sum_{j'} r_{j'} G\mathrm{pr}_{1,j'}^{(k)})$ であるか、あるいは $(\sum_{j'} r_{j'} G\mathrm{pr}_{1,j'}^{(k')}) \times r_j G\mathrm{pr}_{1,j}^{(k-k'+1)}$ $(1<k'<k)$ である。いずれの場合にも主張１）が正しいことは容易にわかる。よって、主張１）は $S_{1,j}^{(k+1)}$ の G 積にも成立する。　主張２）は (2.16) と (3.1) から直ちに導かれる。

(2.11), (2.13), (2.16) によれば、G 積に -1 が掛けられるのは、$S_{1,j}^{(k)}$ から $\delta G_j^{(k)}$ を構成する際に (3.1) の因子 $r_j^{k''} G_j$ を $-r_j^{k''+1} G_j$ で置き換えるときであり、その場合に限られる。したがって、(3.4) が得られる。主張４）は主張３）の直接的帰結である。 ◇

定義２（演算子 $\mathcal{P},\mathcal{Q}$ と計算上の制約）（$\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ の作用を (3.1) の G 積を用いて説明する）
$\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ は $S_{1,j}^{(k)}$ に作用し次のように働く；ここで、$\mathcal{P}\otimes S_{1,j}^{(k)}$ の変換された因子 $\vec{\rho}^{k''+1}\cdot\vec{G}$ は変換後の G 積の右端に置く。

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\otimes S_{1,j}^{(k)} &= \delta G_1^{(k)} = S_{1,j}^{(k)}[r_j^{k''}G_j \to \vec{\rho}^{k''+1}\cdot\vec{G}], \\ \mathcal{Q}\otimes S_{1,j}^{(k)} &= \delta G_j^{(k)} = S_{1,j}^{(k)}[r_j^{k''}G_j \to -r_j^{k''+1}G_j]. \end{aligned} \tag{3.5}$$

さらに、$\mathcal{P}$ を $\delta G_j^{(k)}$ に、$\mathcal{Q}$ を $\delta G_1^{(k)}$ に作用させることにする。$\mathcal{P}$ は $\delta G_j^{(k)}$ に次のように作用する。

$$\mathcal{P}\otimes[G_1^{k_0}(\vec{\rho}\cdot\vec{G})^{l_1}\cdots(\vec{\rho}^{k'}\cdot\vec{G})^{l_{k'}}(-r_j^{k''+1}G_j)] = G_1^{k_0}(\vec{\rho}\cdot\vec{G})^{l_1}\cdots(\vec{\rho}^{k'}\cdot\vec{G})^{l_{k'}}(-\vec{\rho}^{k''+2}\cdot\vec{G}). \tag{3.6}$$

$\mathcal{Q}$ は $\delta G_1^{(k)}$ に作用し、右端の因子を次のように変える；変えられた因子はそのまま右端に置く。

$$\mathcal{Q}\otimes[G_1^{k_0}(\vec{\rho}\cdot\vec{G})^{l_1}\cdots(\vec{\rho}^{k'}\cdot\vec{G})^{l_{k'}}(\vec{\rho}^{k''+1}\cdot\vec{G})] = G_1^{k_0}(\vec{\rho}\cdot\vec{G})^{l_1}\cdots(\vec{\rho}^{k'}\cdot\vec{G})^{l_{k'}}(-\vec{\rho}^{k''+2}\cdot\vec{G}). \tag{3.7}$$

もちろん、計算後は $\delta G_1^{(k)}$ の各因子は自由に入れ換えてよい。 ◇

定義３（台） $G_1^{(k)}$ に現れるあらゆる G 積、ただし係数は除く、の集合を $G_1^{(k)}$ の台といい、support$(G_1^{(k)})$ と表す。たとえば、support$(G_1^{(3)}) = \{G_1(\vec{\rho}\cdot\vec{G})^2, G_1^2(\vec{\rho}^2\cdot\vec{G})\}$. ◇

変換後の因子を右端に置くとの制約の下、$\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ は可換である。そこで、計算の便宜上、次なる $\delta\tilde{G}_1^{(k)}$ を導入する。

$$\delta\tilde{G}_1^{(1)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \vec{\rho}\cdot\vec{G}, \qquad \delta\tilde{G}_1^{(k)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathcal{Q}\otimes\delta G_1^{(k)}\ (=\mathcal{P}\otimes\delta G_j^{(k)}) \quad (k\geq 2). \tag{3.8}$$

$\delta\tilde{G}_1^{(k)}$ を用いると、逐次算式 (2.13) は次のように簡潔に表わされる。

$$\delta G_1^{(k)} = \sum_{k'=1}^{k-1}\delta G_1^{(k')}\delta\tilde{G}_1^{(k-k')} \qquad (k\geq 2). \tag{3.9}$$

補題２ $k\geq 3$ に対し、次の関係式と主張５）が成立する。

$$\delta G_1^{(k-1)}\delta\tilde{G}_1^{(1)} = \vec{\rho}\cdot\vec{G}\otimes\delta G_1^{(k-1)}, \qquad \delta G_1^{(1)}\delta\tilde{G}_1^{(k-1)} = G_1\mathcal{Q}\otimes\delta G_1^{(k-1)}, \tag{3.10}$$

$$\delta G_1^{(k-2)}\delta\tilde{G}_1^{(2)} = G_1\mathcal{Q}\otimes(\delta G_1^{(k-2)}\delta\tilde{G}_1^{(1)}), \qquad \delta G_1^{(2)}\delta\tilde{G}_1^{(k-2)} = \vec{\rho}\cdot\vec{G}\otimes(\delta G_1^{(1)}\delta\tilde{G}_1^{(k-2)}). \tag{3.11}$$

主張５）数係数を除くとき、$\delta G_1^{(k)}$ 中の任意の G 積は、$\delta G_1^{(k-1)}$ の G 積に $\vec{\rho}\cdot\vec{G}$ を掛けるか、あるいは $G_1\mathcal{Q}$ を作用させて得られるし、逆もまた正しい。同じことは $\delta\tilde{G}_1^{(k)}$ にも正しい。すなわち、次式が成立する。

$$\begin{aligned} \mathrm{support}(\delta G_1^{(k)}) &= \mathrm{support}([\vec{\rho}\cdot\vec{G}+G_1\mathcal{Q}]\otimes\delta G_1^{(k-1)}), \\ \mathrm{support}(\delta\tilde{G}_1^{(k)}) &= \mathrm{support}([\vec{\rho}\cdot\vec{G}+G_1\mathcal{Q}]\otimes\delta\tilde{G}_1^{(k-1)}). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Proof $\delta G_1^{(1)} = G_1$ かつ $\delta\tilde{G}_j^{(1)} = \vec{\rho}\cdot\vec{G}$ ゆえ、(3.8) から直ちに (3.10) の二つの関係式が得られる。また、$\delta\tilde{G}_1^{(2)} = G_1(-\vec{\rho}^2\cdot\vec{G}) = G_1\mathcal{Q}\otimes\delta\tilde{G}_1^{(1)}$ から $\delta G_1^{(k-2)}\delta\tilde{G}_1^{(2)} = G_1\mathcal{Q}\otimes(\delta G_1^{(k-2)}\delta\tilde{G}_1^{(1)})$ が得られる。この等式から (3.11) の左の関係式が得られる。同様に、$\delta G_1^{(2)} = G_1(\vec{\rho}\cdot\vec{G})$ から (3.11) の右の関係式が得られる。

主張５）は $k=3$ に対しては正しい。主張５）が $k-1$ 次まで正しいと仮定する。この仮定の下、(3.10) から次式が得られる（下記の真中の式は帰納法の仮定による。

$$\begin{aligned}\mathrm{support}(G_1^{(k)}) &= \mathrm{support}(\delta G_1^{(k-1)}\delta\tilde{G}_1^{(1)}) \cup \mathrm{support}\Big(\textstyle\sum_{k'=2}^{k-1}\delta G_1^{(k-k')}\delta\tilde{G}_1^{(k')}\Big)\\ &= \mathrm{support}((\vec{p}\cdot\vec{G})\cdot\delta G_1^{(k-1)}) \cup \\ &\qquad \mathrm{support}\Big(\textstyle\sum_{k'=2}^{k-1}\delta G_1^{(k-k')}\,[\vec{p}\cdot\vec{G}+G_1Q]\otimes\delta\tilde{G}_1^{(k'-1)}\Big)\\ &= \mathrm{support}((\vec{p}\cdot\vec{G})\cdot\delta G_1^{(k-1)}) \cup \mathrm{support}([\vec{p}\cdot\vec{G}+G_1Q]\otimes\delta G_1^{(k-1)}).\end{aligned}$$

したがって、(3.10) は k 次に対しても正しい。 ◇

上記補題を基に我々は次の予想を得た（証明は細部が未完成なので、本稿では述べない）。

予想１ $k\geq 2$ のとき、$\delta G_1^{(k+1)}$ と $\delta G_1^{(k)}$ の間には

$$\delta G_1^{(k+1)} = [2\,(\vec{p}\cdot\vec{G})+2\,G_1Q]\otimes\delta G_1^{(k)} - (\text{前項のいくつかの } G \text{ 積}) \tag{3.13}$$

なる関係式が成立する。 ◇

例１ $k=2,3,4,5$ の関係式を具体的に示す。

$$\begin{aligned}\delta G_1^{(3)} &= [2\,(\vec{p}\cdot\vec{G})+2\,G_1Q]\otimes\delta G_1^{(2)} - (\vec{p}\cdot\vec{G})\cdot\delta G_1^{(2)} - G_1Q\otimes\delta G_1^{(2)},\\ \delta G_1^{(4)} &= [2\,(\vec{p}\cdot\vec{G})+2\,G_1Q]\otimes\delta G_1^{(3)} - (\vec{p}\cdot\vec{G})\cdot\delta G_1^{(3)} - G_1Q\otimes\delta G_1^{(1)}\delta\tilde{G}_1^{(2)},\\ \delta G_1^{(5)} &= [2\,(\vec{p}\cdot\vec{G})+2\,G_1Q]\otimes\delta G_1^{(4)} - (\vec{p}\cdot\vec{G})\cdot(\delta G_1^{(1)}\delta\tilde{G}_1^{(3)}+\delta G_1^{(3)}\delta\tilde{G}_1^{(1)}) - G_1Q\otimes(\delta G_1^{(3)}\delta\tilde{G}_1^{(1)}),\\ \delta G_1^{(6)} &= [2\,(\vec{p}\cdot\vec{G})+2\,G_1Q]\otimes\delta G_1^{(5)} - (\vec{p}\cdot\vec{G})\cdot(\delta G_1^{(1)}\delta\tilde{G}_1^{(4)}+\delta G_1^{(4)}\delta\tilde{G}_1^{(1)})\\ &\qquad - G_1Q\otimes(\delta G_1^{(1)}\delta\tilde{G}_1^{(4)}) + G_1Q^2\otimes(\delta G_1^{(2)}\delta G_1^{(2)}\delta\tilde{G}_1^{(1)}).\end{aligned}$$

$\delta G_1^{(6)}$ の最後の項がプラスだが、この項は $(\vec{p}\cdot\vec{G})(\delta G_1^{(4)}\delta\tilde{G}_1^{(1)})$ の一つの G 積とキャンセルする。 ◇

4 多変数 Taylor 級数の収束領域

$S_{1,j}^{(k)}$ が有する G 積の個数を N_k とする；ここで (3.1) の G 積は $|m|$ 個と勘定する。N_k は $\delta G_1^{(k)}$ あるいは $\delta G_j^{(k)}$ が有する G 積の個数でもある。さらに、N_k と N_{k-1} の比を R_k とする：$R_k \stackrel{\mathrm{def}}{=} N_k/N_{k-1}$. $k=1,2$ のとき、$N_1=1$, $N_2=1$ である。$k\geq 3$ のとき、補題１の主張３）から次の逐次式が成立する。

$$N_k = N_{k-1}N_1 + N_{k-2}N_2 + \cdots + N_2N_{k-2} + N_1N_{k-1}. \tag{4.1}$$

この逐次式から計算した $N_1,\ldots,N_{10}$ と $R_2,\ldots,R_{10}$ を表に示す。

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N_k	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862
N_k/N_{k-1}		1	2	2.5	2.8	3	3.1	3.25	3.3	3.4

逐次式 (4.1) を使って $k=500$ まで R_k を計算したところ、次の予想を得た（この予想の証明は簡単そうに思えるが、予想１と密接に関係していて、証明は簡単ではない）。

予想2 $k \geq 2$ に対し、R_k と N_k は次式で表される。

$$R_k = 4\left(1-\frac{3}{2k}\right), \qquad N_k = 2^{k-1}\frac{(2k-3)!!}{k!} = \frac{(2k-2)!}{k!\,(k-1)!} = \frac{1}{k}\binom{2k-2}{k-1}. \tag{4.2}$$

予想1と予想2より、次の簡潔な関係式が得られる。

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\delta G_1^{(k+1)}}{\delta G_1^{(k)}} = 2\vec{\rho}\cdot\vec{G} + 2G_1 Q. \tag{4.3}$$

(2.17) によれば、$\tilde{F}(x,u,t)$ の x に関するべき級数根は $\alpha_1 - t\,\delta G_1^{(1)} - t^2\delta G_1^{(2)} - \cdots$ である。この根を t のべき級数とみなせば、1変数用のよく知られた定理から収束領域が直ちに得られる。t は補助変数であり、Hensel 構成後に $t=1$ とするのであるから、t に関する収束領域が原点を中心とする半径1の円であればよい。したがって、べき級数根の収束領域は次式で与えられる。

$$2\cdot|\vec{\rho}\cdot\vec{G} + G_1 Q| < 1 \qquad (Q \text{ は } \max\{|\rho_2|,\cdots,|\rho_n|\} \text{ とみなす}). \tag{4.4}$$

2次式の場合には収束領域は二根に共通だが、3次以上の多項式の場合には収束領域は一般に根毎に異ることを (4.4) は示している。

例2 2次式 $F(x,u,v) = (x-1)(x+1) + u^2 - v^2$ で公式を検証する。
$F_0(x) = (x-1)(x+1)$, $F_{\rm u}(x,u,v) = u^2-v^2$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, $F_0'(x) = 2$, $F_0'(-1) = -2$ より、

$$G_1 = \frac{u^2-v^2}{2}, \quad G_2 = -\frac{u^2-v^2}{2}, \quad \vec{\rho} = \left(\frac{-1}{2}\right)$$

を得る。したがって、収束領域として、$2\cdot|\frac{u^2-v^2}{4} + \frac{u^2-v^2}{4}| < 1$ すなわち $|u^2-v^2| < 1$ を得る。実際、$\tilde{F}(x,u,v,t)$ の Hensel 構成は次式となる。

$$\begin{aligned}\tilde{F}(x,u,v,t) &= \left(x-1+t\frac{u^2-v^2}{2}+t^2\frac{(u^2-v^2)^2}{8}+t^3\frac{(u^2-v^2)^3}{16}+\cdots\right)\\ &\times \left(x+1-t\frac{u^2-v^2}{2}-t^2\frac{(u^2-v^2)^2}{8}-t^3\frac{(u^2-v^2)^3}{16}-\cdots\right).\end{aligned}$$

◇

5 多変数 Hensel 級数の収束領域

拡張 Hensel 構成とは、従来の Hensel 構成が破綻する展開点における Hensel 構成であることを述べた。拡張 Hensel 因子は、従変数の有理式が係数部に現れるという点で非常に特徴的だが、初期因子の決め方を除けば、その構成法は一般 Hensel 構成と全く同じである。初期因子は、与式 $F(x,u)$ から一意的に決まる **Newton 多項式**を因数分解して決める；詳しくは文献 [6],[4] を参照されたい。

例3 拡張 Hensel 構成に疎い読者のため、拡張 Hensel 構成と Hensel 級数根を示す。

$$\begin{aligned}F(x,u,v) &= (u^2-v^2)\,x^3 - (u^3+3u^2v-uv^2-v^3)\,x^2\\ &\quad + (2u^3v+3u^2v^2)\,x - (u^3v^2+u^2v^3-u^6-v^6).\end{aligned}$$

$F(x,0,0) = 0$ であり、原点が特異点であることが分る。Newton 多項式は $F(x,u,v) - (u^6+v^6)$ であり、$(x-u-v)\cdot[(u+v)x-uv]\cdot[(u-v)x-uv]$ と因数分解できる。$(x-u-v)$, $[(u+v)x-uv]$ と $[(u-v)x-uv]$

を初期因子に選んで $F(x,u,v) \equiv (x-\chi_1^{(k)})\cdot[(u+v)(x-\chi_2^{(k)})]\cdot[(u-v)(x-\chi_3^{(k)})]$ と拡張 Hensel 構成すると次式が得られる。

$$\begin{aligned}
\chi_1^{(k)}(u,v) &= (u+v) - \frac{u^6+v^6}{(u^2+uv+v^2)(u^2-uv-v^2)} + \cdots, \\
\chi_2^{(k)}(u,v) &= \frac{1}{u+v}\Big[uv - \frac{(u+v)(u^6+v^6)}{2uv^2\,(u^2+uv+v^2)} + \cdots\Big], \\
\chi_3^{(k)}(u,v) &= \frac{1}{u-v}\Big[uv + \frac{(u-v)(u^6+v^6)}{2uv^2\,(u^2-uv-v^2)} + \cdots\Big].
\end{aligned}$$

係数の分母に特徴的な因子が現れるが、どんな因子が現れるかは全て解明済である。 ◇

拡張 Hensel 構成と一般 Hensel は構成法が同じため、2章で述べた新しい定式化はそのまま拡張 Hensel 構成にも適用できる；異るのは Moses-Yun の補間式が $\mathbf{C}(\boldsymbol{u})[x]$ の要素となる（代数関数 θ を導入する場合には $\mathbf{C}(\boldsymbol{u})[x,\theta]$ の要素となる）ことだけである。したがって、収束領域を表す公式 (4.4) は、拡張 Hensel 級数に対してもそのまま成立する。

6 おわりに

本稿に記述した Hensel 構成の新しい方法は、本稿に述べた形態だけでなく、任意の次数因子に分解する方法に一般化されている [5]。この新しい方法を考案した理由は、Hensel 級数の収束性と多価性を数値的に研究した論文 [1] を昨年7月に開催された SNC2007 に投稿したら、レフェリーの一人から「著者らはこれらの性質を理論的に解明していないのみならず、解明しようともしていない。」と批判されたからである。実際に新しい構成法を考案して、その強力さに驚くとともに、Hensel 構成の歴史に新しい1頁を開いたと自負している。さらに、多変数代数関数の収束領域公式の導出（限定された場合の公式だが）に関しては、百年来の数学的問題に解答を与えつつあるのではないか、と思っている。

参考文献

[1] D. Inaba and T. Sasaki. A numerical study of extended Hensel series. *Proc. SNC'2007 (Symbolic-Numeric Computation)*, J. Verchelde and S. Watt (Eds.), ACM, **ISBN**: 978-1-59593-744-5, 103-109, 2007.

[2] T.-C. Kuo. Generalized Newton-Puiseux theory and Hensel's lemma in $\mathbf{C}[[x,y]]$. *Canad. J. Math.* **XLI** (1989), 1101-1116.

[3] J. McDonald. Fiber polytopes and fractional power series. *J. Pure Appl. Algebra* **104** (1995), 213-233.

[4] T. Sasaki and D. Inaba. Hensel construction of $F(x,u_1,\ldots,u_\ell)$, $\ell \geq 2$, at a singular point and its applications. *ACM SIGSAM Bulletin* **34** (2000), 9-17.

[5] T. Sasaki and D. Inaba. Multivariate Hensel construction in Roots. Preprint of Univ. Tsukuba, 2008, 16 pages.

[6] T. Sasaki and F. Kako. Solving multivariate algebraic equation by Hensel construction. *Japan J. Indust. Appl. Math.* **16** (1999), 257-285. (This paper has been written in 1993; the publication was delayed by a very slow refereeing procedure.)

[7] D.Y.Y. Yun. *The Hensel lemma in algebraic manipulation.* Ph. D. Thesis, Dept. Math., M.I.T., Nov. 1973.